1. Теория множеств

Множество - понятие неопределяемое. Мн-во состоит из *Элементов*, эл-ты принадлежат мн-ву. Обозн: a∈A, b∉A (эл-т a принадлежит мн-ву A, эл-т b не принадлежит мн-ву A).
При перечислении эл-ты мн-ва записываются в фигурных скобках, например: A={1,2,3} - мн-во чисел 1,2,3. 1∈A, 4∉A.
Нужно знать 5 операций над множествами: *включение, пересечение, объединение, разность, дополнение*

1) мн-во A включается в мн-во B (иначе — является подмножеством мн-ва B), если любой эл-т мн-ва A принадлежит мн-ву B. Обозн: A⊂B. Пример: A={1,2}, B={3,4}, C={1,2,3}. A⊂C, B⊄C (B не включается в C).
2) Пересечением мн-в A и B называется мн-во C, состоящее из эл-тов, общих для A и B. Обозн: C=A∩B. Пр.: A={1,2,3}, B={2,3,4}, A∩B={2,3}.
3) Объединением мн-в A и B называется мн-во C, состоящее из всех эл-тов мн-ва A и всех эл-тов мн-ва B. Обозн: C=A∪B. Пр.: A={1,2,3}, B={2,3,4}, A∪B={1,2,3,4} (ответьте: почему числа 2 и 3 не выписаны по два раза?).
4) Разностью между мн-вом A и мн-вом B называется мн-во C, состоящее из тех эл-тов A, которые не вошли в B. Обозн: C=A╲B. Пр.: A={1,2,3,4,5}, B={2,3,5,6}, A╲B={1,4}, B╲A={6}.
5) *Универсальным* называется мн-во всех эл-тов в рамках данной задачи («мн-во всего»). Дополнением к мн-ву A называется разность между универсальным мн-вом и мн-вом A.

Множество, не содержащее ни одного эл-та, называется *пустым*. Обозн: ∅.

2. Математическая логика

Логика - наука о том, как правильно строить высказывания, в частности, в мат. теориях (как правильно строить доказательства).
М.Л. - это Л., записанная на мат. языке и пригодная для проведения вычислений в автоматическом режиме на компьютерах.
Высказывание - первичное понятие МЛ. Высказывания можно разделить на *элементарные* и *составные*. Элементарные высказывания выбираются произвольным образом, из них составляются составные высказывания при помощи *логических операций*. Существует 5 основных логических операций: *отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация* и *эквиваленция*. Легче всего понять суть логических операций, изучая *Таблицы истинности*. Всякое высказывание может быть либо истинным, либо ложным. Истина и ложь называются значениями высказываний и обозначаются символами 1 и 0

1) отрицание высказывания A. Обозн: $\overline{A}$ (читается «не A»)

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

2) Конъюнкция высказываний A и B (логическое «и», логическое умножение). Обозн: A∧B

A	B	A∧B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3) дизъюнкция высказываний A и B (логическое «или», логическое сложение). Обозн: A∨B

A	B	A∨B
0	0	0

0	1	1
1	0	1
1	1	1

4) импликация высказываний А и В (следствие). Обозн: А⇒В

A	B	A⇒B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5) эквиваленция высказываний А и В (равносильность). Обозн: А⇔В

A	B	A⇔B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Составное высказывание, истинное при любых значениях элементарных высказываний, называется *законом логики*. Доказать закон можно с помощью таблиц истинности. Составное высказывание, ложное при любых значениях элем. высказываний, наз. *Противоречием*.

3. Отношения на числовых множествах

Определение: *декартовым (прямым) произведением* двух мн-в называется множество всех упорядоченных пар, в которых первый эл-т берется из первого мн-ва, а второй - из второго. Упорядоченные пары обозначаются угловыми скобками: (a,b).
Пр: A={a,b,c}, B={1,2}, A*B={(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}

Бинарным отношением на мн-ве X называется всякое подмножество декартова произведения X на себя (*декартова квадрата мн-ва X*).
Если пара (x,y) является элементом бинарного отношения A, то говорят, что x и y находятся в отношении A. Отношения могут быть заданы перечислением пар, описанием, формулой. Пр: отношение перпендикулярности, отношение «быть ровно в 5 раз больше», отношение «любить один и тот же фильм», отношение дружбы.

4. Теория вероятности

1. Комбинаторика

1. Перестановки. *Перестановкой* наз. любой способ расставить эл-ты мн-ва в опред. порядке. Число всех перест. мн-ва A, имеющего n эл-тов, равно n!=1*2*...*n.

Пр: число способов расставить на полке 6 книг равно 6!=1*2*3*4*5*6=720.

2. Размещения. *Размещением из n по k* наз. способ выбрать k эл-тов из мн-ва A, имеющего n эл-тов, и расставить их в некотором порядке.
Число всех разм. из n по k равно n!/(n-k)!

Пр: число способов выбрать 3 победителей из 10 участников равно 10!/7!=10*9*8=720.

3. Сочетания. *Сочетанием из n по k* наз. способ выбрать k эл-тов из мн-ва, имеющего n эл-тов без учета порядка.
Число всех сочет. из n по k обозначается символом C_n^k и равно n!/k!/(n-k)!

Пр: число вариантов пригласить в гости 3 друзей из 10 равно C_{10}^3=10!/3!/7!=720/6=120.

2. Случайные события

Понятие *События* в теории вероятностей - первичное. *Случайное С.* - это событие, которое в будущем может произойти, а может и не произойти, и это неизвестно заранее.
С.С. наз. *элементарными*, или *случаями*, если:
1) никакие два из них не могут произойти одновременно (*несовместны*);
2) все они имеют равные шансы произойти (*равновозможны*);
3) одно из них обязательно произойдет (образуют *полную группу*).

Пр: выпадение герба (Г) и решки (Р) при бросании 1 монеты - случаи;
выпадение 1,2,...,6 очков при бросании игрального кубика - случаи;
попадание и промах при выстреле - не случаи, т.к. они не равновозможны.

Кроме элементарных рассматриваются *составные события*, состоящие из нескольких элементарных.

Например, событие: "выпадение не менее 5 очков на кубике" состоит из 2 элем.: 5 и 6.
Те случаи, которые входят в составное событие, наз. *благоприятными*.
Вероятностью (составного) события А называется отношение числа благоприятных случаев (m) к числу всех случаев (n)

$$P(A)=m/n$$

Пр: вероятность выпадения Г при бросании 1 монеты - 1\2;
вероятность выпадения ГГ при бросании 2 монет - 1\4;
вероятность выпадения 6 при бросании кубика - 1\6;
вероятность вынуть черный шар из корзины с 4 белыми ш. и 5 черными ш. - 4\9;
вероятность вынуть 2 синих карандаша из коробки с 5 синими к. и 6 красными к. - $C_5^2/C_{11}^2=5!2!9!/2!3!11!=2/11\approx 0.19$;
вероятность попадания в мишень не равна 1\2, т.к. попадание - не случай.

Заметим, что сами элем. события можно рассматривать как составные, содержащие только 1 благоприятный случай.
Кроме того, можно рассматривать событие, которому не благоприятствует ни один случай - *невозможное событие* (P=0), а также событие, которому благоприятствуют все случаи - *достоверное событие* (P=1). Вероятность С.С. всегда заключена между числами 0 и 1.

Существует глубокая связь между теорией вероятности и теорией множеств. Всякое событие есть подмножество во мн-ве всех случаев (универсальном мн-ве, которое в Т.В. наз. *пространством элементарных исходов*).

Достоверное событие есть само пр-во элем. исх. Невозм. соб. - пустое мн-во. Два события могут произойти одновременно (*совместны*), если они пересекаются как мн-ва (у них есть общие элем. исходы), и т.д.

3. Свойства вероятности

События А и В называются *независимыми*, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.

Пр: выпадение герба при первом бросании и герба при втором бросании — независимы.

Событие, состоящее в том, что не наступило событие А, называется *противоположным*, обозн: $\overline{A}$.

Пр: выпадение герба при однократном бросании противоположно выпадению решки.

События можно складывать, вычитать и перемножать.

Суммой событий А и В называется событие С, состоящее в том, что произошло А или В (или оба вместе). **Теорема** о сумме несовместных событий:
Если события несовместны, то вероятность суммы равна сумме вероятностей

$$\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

Пр: вероятность выпадения 5 или 6 очков на кубике: P(5)+P(6)=1/6+1/6=1/3.

Произведением событий А и В называется событие С, состоящее в том, что произошли А и В. **Теорема** о произведении независимых событий:
Если события независимы, то вероятность их произведения равна произведению

вероятностей

P(A*B)=P(A)P(B)

Пр: вероятность выпадения двух гербов подряд: P=1/2*1/2=1/4

Разностью событий A и B называется событие C, состоящее в том, что произошло A и не произошло B.

$$\mathbf{A-B=A*\overline{B}}$$

5. Двоичная система счисления

1. Правила перехода между двоичной и десятичной системами счисления

Переход от двоичной системы к десятичной.

1) надписываем над цифрами двоичного числа номера разрядов — числа, начинающиеся с нуля справа налево, пример:

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
1100101100

2) составляем сумму из разрядных цифр числа, умноженных на соответствующие степени двойки (показатели степени равны номерам разрядов):

$\mathbf{1}*2^9+\mathbf{1}*2^8+\mathbf{0}*2^7+\mathbf{0}*2^6+\mathbf{1}*2^5+\mathbf{0}*2^4+\mathbf{1}*2^3+\mathbf{1}*2^2+\mathbf{0}*2^1+\mathbf{0}*2^0=512+128+32+8+4=684$

Переход от десятичной системы к двоичной.

1) делим число, записанное в десятичной системе, на 2 с остатком, неполное часное снова делим на 2 с остатком — и так далее до тех пор, пока неполное частное не станет равным 0;

2) выписываем остатки от деления в обратном порядке, пример:

35:2=17, остаток 1;
17:2=8, остаток 1;
8:2=4, остаток 0;
4:2=2, остаток 0;
2:2=1, остаток 0;
1:2=0, остаток 1.
Итак, 35_{10}=100011

2. Арифметические действия в двоичной системе счисления

Арифметические операции: сложение, вычитание, уможение, деление в двоичной ситсеме счисления выполняются по обычным правилам этих действий «в столбик», примеры:

3+3=6

$$\begin{array}{r} 11 \\ +\ \ 11 \\ \hline 110 \end{array}$$

Комментарий: в младшем (нулевом) разряде выполняем сложение: $1+1=10_2$, 0 пишем, 1 уходит в следующий разряд. В этом следующем (первом) разряде вполняем сложение: $1+1+1=11_2$, 1 пишем, 1 уходит в следущий (второй) разряд.

Умножение:

2*2=4

$$\begin{array}{r} 1\ 0 \\ *\ \ 1\ 0 \\ \hline 0\ 0 \\ +\ 1\ 0\ \ \\ \hline 1\ 0\ 0 \end{array}$$

2*3=6

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ *\ \ 1\ 0 \\ \hline 0\ 0 \\ +\ 1\ 1\ \ \\ \hline 1\ 1\ 0 \end{array}$$

3*3=9

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ *\ \ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1 \\ +\ 1\ 1\ \ \\ \hline 1\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Комментарий: умножение первого числа на разрядные единицы второго числа происходит по обычным правилам умножения без каких-либо отличий от десятичной системы, сложение было разобрано выше.